Ma 12/59 Rü_Online-Ergänzung

Geniale Ideen großer Mathematiker (10)

Cardano und Tartaglia lösen kubische Gleichungen

Heinz Klaus Strick

Online-Ergänzung

CARDANO und TARTAGLIA lösen kubische Gleichungen

1545 erscheint GIROLAMO CARDANOs *Ars magna*, eines der bedeutendsten Werke der Mathematikgeschichte. In diesem Buch wird erläutert, wie Gleichungen 3. und 4. Grades gelöst werden können. Für die Lösung der Gleichung $x^3 + 6x = 20$ verwendet CARDANO eine geometrische Methode, die 10 Jahre zuvor von NICOLO TARTAGLIA entwickelt worden war.

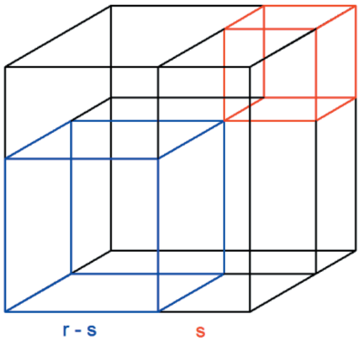
NICOLO TARTAGLIA

GIROLAMO CARDANO

Zeichnungen
© Andreas Strick 2012

- Erläutern Sie die folgenden Schritte:

(1) Ein Würfel mit Kantenlänge r kann so zerlegt werden, dass zwei Würfel und drei zueinander kongruente Quader entstehen. Was hat dies mit der Beziehung $r^3 - s^3 = (r - s)^3 + 3 \cdot r \cdot s \cdot (r - s)$ zu tun?



(2) Ersetzt man in der Gleichung $x^3 + 6x = 20$ die Variable x durch $r - s$, dann folgt: $3rs = 6$ und $r^3 - s^3 = 20$

(3) Hieraus folgt: $\left(\frac{2}{s}\right)^3 - s^3 = 20$ und $r^3 - \left(\frac{2}{r}\right)^3 = 20$

(4) Hieraus folgt: $s^6 + 20s^3 = 8$ und $r^6 - 20r^3 = 8$

(5) Mit $y = s^3$ und $z = r^3$ folgt: $y = -10 + \sqrt{108}$ und $z = 10 + \sqrt{108}$

(6) $x = r - s = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}$ ist eine Lösung der kubischen Gleichung.

(7) Der Taschenrechner gibt hierfür an: $x = 2$. Stimmt dies wirklich? Und wenn ja, warum?

MNU Journal – Ausgabe 3.2016 – ISSN 0025-5866 – © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

3 Anmerkungen zum Prioritätsstreit zwischen TARTAGLIA und CARDANO

Zu Beginn des 16. Jahrhunderts war das Rechnen mit negativen Zahlen noch nicht entwickelt; Koeffizienten in Gleichungen waren grundsätzlich positive Zahlen. Bei den kubischen Gleichungen mussten daher 13 verschiedene Typen betrachtet werden:
Sieben Gleichungstypen enthalten alle Potenzen:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0;$$
$$x^3 + bx + c = ax^2;$$
$$x^3 + ax^2 + c = bx;$$
$$x^3 + ax^2 + bx = c;$$
$$x^3 + c = ax^2 + bx;$$
$$x^3 + bx = ax^2 + c;$$
$$x^3 + ax^2 = bx + c;$$

und bei sechs Typen fehlt jeweils ein Glied:

$$x^3 + bx + c = 0;$$
$$x^3 + c = bx;$$
$$x^3 + bx = c;$$
$$x^3 + ax^2 + c = 0;$$
$$x^3 + c = ax^2;$$
$$x^3 + ax^2 = c.$$

SCIPIONE DEL FERRO, Dozent an der Universität von Bologna, war es um 1515 gelungen, ein Verfahren zu entwickeln, mit dem rechnerisch eine Lösung für den speziellen Fall $x^3 + b \cdot x = c$ bestimmt werden konnte. Er vertraute das Lösungsverfahren u. a. einem seiner Schüler, ANTONIO FIOR, an. Dieser verbreitete im Jahr 1535, dass er allgemein in der Lage sei, kubische Gleichungen zu lösen.

NICOLO FONTANA, genannt TARTAGLIA („Stotterer"), ein Mathematiklehrer aus Brescia, nahm die Herausforderung FIORS zu einem öffentlich ausgetragenen Wettstreit an, denn in der Zwischenzeit hatte er selbst ein Lösungsverfahren für Gleichungen des Typs $x^3 + a \cdot x^2 = c$ gefunden.

Jeder der Kontrahenten stellte dem Gegner dreißig Aufgaben, die dieser innerhalb einer Frist von vierzig Tagen lösen musste. Alle Aufgaben FIORS waren jedoch von dem einen Typ, den er (dank SCIPIONE DEL FERRO) beherrschte. Erst in der letzten Nacht vor Ablauf der Frist hatte TARTAGLIA die Idee, wie das Lösungsverfahren für diesen Typ ablaufen konnte (vergleiche Arbeitsblatt). FIOR hingegen erwies sich als mittelmäßiger Mathematiker, der sich darauf verlassen hatte, dass sein Gegner überhaupt nicht in der Lage wäre, kubische Gleichungen zu lösen.

1539 erfuhr GIROLAMO CARDANO, der gerade dabei war, ein Mathematikbuch zu verfassen, dass TARTAGLIA eine Lösungsmethode für den Typ $x^3 + b \cdot x = c$ gefunden hatte, nahm zu diesem Kontakt auf und drängte ihn dazu, ihm das Verfahren zu erläutern. Erst als CARDANO geschworen hatte, dies nicht in sein Mathematikbuch aufzunehmen, verriet TARTAGLIA den von ihm gefundenen Weg.

Im Jahr 1545 erschien dann CARDANOS *Ars magna* (*Ars magnae sive de Regulis Algebraicis).* In 40 Kapiteln stellte er dar, wie man die verschiedenen Typen von Gleichungen 3. und 4. Grades lösen kann.

Ausdrücklich nannte er DEL FERRO und TARTAGLIA als Entdecker der Lösungen bestimmter Gleichungstypen, außerdem seinen Schüler LODOVICO FERRARI, der Lösungsverfahren für Gleichungen 4. Grades entwickelt hatte. CARDANO hatte nämlich in der Zwischenzeit erfahren, dass DEL FERRO und nicht TARTAGLIA als Erster den besagten Gleichungstyp gelöst hatte, und fühlte sich nicht mehr an sein Versprechen gebunden.

Nach der Veröffentlichung der *Ars magna* genoss CARDANO seinen Ruhm als bedeutendster Mathematiker seiner Zeit; TARTAGLIA dagegen starb verarmt und verbittert (STRICK 2012).

4 Zur Untersuchung einzelner Fälle

4.1 Allgemeine Lösung der Gleichung vom Typ $x^3 + b \cdot x = c$ für $b, c > 0$

Analog zum Artikel wird die Beziehung
$(r-s)^3 = r^3 - 3 \cdot r^2 \cdot s + 3 \cdot r \cdot s^2 - s^3$, also
$(r-s)^3 + 3 \cdot r \cdot s \cdot (r-s) = r^3 - s^3$ verwendet.

Setzt man $x = r - s$, dann folgt
$3 \cdot r \cdot s = b \;\wedge\; r^3 - s^3 = c$, also
$r = \frac{b}{3s}$ sowie $s = \frac{b}{3r}$.

Einsetzen in die Gleichung $r^3 - s^3 = c$ ergibt dann

$$\left(\frac{b}{3s}\right)^3 - s^3 = c \;\Leftrightarrow\; \frac{b^3}{27s^3} - s^3 = c \Leftrightarrow s^6 + cs^3 = \frac{b^3}{27} \;\Leftrightarrow\; \left(s^3 + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{b^3}{27} + \frac{c^2}{4} \text{ sowie}$$

$$r^3 - \left(\frac{b}{3r}\right)^3 = c \;\Leftrightarrow\; r^3 - \frac{b^3}{27r^3} = c \Leftrightarrow r^6 - cr^3 = \frac{b^3}{27} \;\Leftrightarrow\; \left(r^3 - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{b^3}{27} + \frac{c^2}{4} .$$

Mit der Substitution $y = s^3$ bzw. $z = r^3$ ergeben sich dann die quadratischen Gleichungen

$$\left(y + \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3 \text{ sowie } \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3 .$$

Wegen $b, c > 0$ ist die Bedingung $\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3 \geq 0$ erfüllt; daher haben diese Gleichungen die positiven Lösungen

$$y = -\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} \text{ sowie } z = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} \text{, also}$$

$$s = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} \text{ sowie } r = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} ,$$

und wegen $x = r - s$ ergibt sich schließlich die Lösung

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} .$$

4.2 Lösung weiterer Gleichungstypen

4.2.1 Gleichungstyp $x^3 = b \cdot x + c$ mit $b, c > 0$

Hier macht CARDANO den Ansatz $x = r + s$. Wegen
$(r+s)^3 = r^3 + 3 \cdot r^2 \cdot s + 3 \cdot r \cdot s^2 + s^3 = 3 \cdot r \cdot s \cdot (r+s) + (r^3 + s^3)$
erhält man durch Koeffizientenvergleich:
$3 \cdot r \cdot s = b \;\wedge\; r^3 + s^3 = c$.
Folgt man der Vorgehensweise wie oben, dann ergibt sich schließlich

$$x = r + s = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

MNU Journal – Ausgabe 3.2016 – ISSN 0025-5866 – © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

4.2.2 Gleichungstyp $x^3 + c = b \cdot x$ mit $b, c > 0$

Wenn x_1 eine Lösung der Gleichung $x^3 + c = b \cdot x$ ist und x_2 eine Lösung der Gleichung $x^3 = b \cdot x + c$, dann folgt:
$x_1^3 + x_2^3 = b \cdot x_1 - c + b \cdot x_2 + c = b \cdot (x_1 + x_2)$.
Wegen $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ folgt dann
$x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = b$.
Kennt man also eine Lösung d der Gleichung $x^3 = b \cdot x + c$, dann erhält man Lösungen der Gleichung $x^3 + c = b \cdot x$ durch Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + d \cdot x + d^2 = b$.

4.2.3 Übrige Gleichungstypen

Die übrigen Gleichungstypen, also die 3-gliedrigen Gleichungen

$x^3 = a \cdot x^2 + c$,
$x^3 + a \cdot x^2 + c$,
$x^3 + c = a \cdot x^2$

sowie die 4-gliedrigen

$x^3 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$,
$x^3 + a \cdot x^2 = b \cdot x + c$,
$x^3 + b \cdot x = a \cdot x^2 + c$,
$x^3 + c = a \cdot x^2 + b \cdot x$,
$x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x = c$,
$x^3 + a \cdot x^2 + c = b \cdot x$,
$x^3 + b \cdot x + c = a \cdot x^2$,

führt CARDANO mithilfe der Substitution
$x = y + \frac{1}{3} \cdot a$ bzw. $x = y - \frac{1}{3} \cdot a$ auf eine der beiden Gleichungstypen
$x^3 = b \cdot x + c$ bzw. $x^3 + b \cdot x = c$ zurück.
Da er allerdings noch nicht über den notwendigen Kalkül verfügte, musste er jede der Substitutionen einzeln geometrisch begründen.

Hinweis: FRANÇOIS VIÈTE (1540 – 1603) zeigte, dass sich mithilfe dieser Substitution allgemein in jeder Gleichung n-ten Grades der Summand $(n-1)$-ten Grades eliminieren lässt (ALTEN et al., 2003).

5 Probleme mit dem Fall $\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3 < 0$ – casus irreducibilis

CARDANO beschäftigte sich auch mit der Lösung der Aufgabe $x^3 = 15 \cdot x + 4$, jedoch bereitete ihm das Ergebnis

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

erhebliche Schwierigkeiten – er bezeichnete die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen als *ausgeklügelte, gekünstelte* Größen (*vere sophisticae*), denn offensichtlich ist $x = 4$ eine Lösung der Gleichung.

Hinweis: Ähnlich wie oben führt der Ansatz
$2 + 11 \cdot \sqrt{-1} = (a + b \cdot \sqrt{-1})^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b \cdot \sqrt{-1} - 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3 \cdot \sqrt{-1}$
nach Koeffizientenvergleich zum Gleichungssystem
$a^3 - 3 \cdot a \cdot b^2 = 2 \wedge 3 \cdot a^2 \cdot b - b^3 = 11$.
Dieses hat die Lösung $a = 2 \wedge b = 1$, also ergibt sich

$$\sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}.$$

Analog erhält man aus dem Ansatz
$2 - 11 \cdot \sqrt{-1} = (a + b \cdot \sqrt{-1})^3$ das Gleichungssystem
$a^3 - 3 \cdot a \cdot b^2 = 2 \;\wedge\; 3 \cdot a^2 \cdot b - b^3 = -11$
mit der Lösung
$a = 2 \;\wedge\; b = -1$,
also $\sqrt[3]{2 - 11 \cdot \sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$.

So ergibt sich schließlich
$$\sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11 \cdot \sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4,$$
d. h., es ist sogar möglich, dass die Summe der Kubikwurzeln aus zwei komplexen Zahlen eine reelle Zahl ergibt.

Nur wenige Jahre nach CARDANOS *Algebra* erkannte RAFAEL BOMBELLI (1526 – 1572), dass man mit komplexen Zahlen im Prinzip genauso rechnen kann wie mit reellen Zahlen. Da er außerdem das Rechnen mit negativen Zahlen beherrschte, entfielen die mühsamen Fallunterscheidungen, die CARDANO noch vornehmen musste. Daher ist es etwas irreführend, wenn man heute die reelle Lösung für eine reduzierte Gleichung 3. Grades $y^3 + p \cdot y + q = 0$, also
$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$
als Cardanische Lösungsformel bezeichnet, insbesondere auch deshalb, weil es TARTAGLIA war, der diese Formel als Rechenvorschrift zur Auffindung einer Lösung verfasste.

Zu erwähnen ist noch, dass es BOMBELLI gelang, nachzuweisen, dass allgemein zu beliebigen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geeignete Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ existieren, für die gilt:
$$\sqrt[3]{\alpha + \beta \cdot \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{\alpha - \beta \cdot \sqrt{-1}} = \left(r + s \cdot \sqrt{-1}\right) + \left(r - s \cdot \sqrt{-1}\right) = 2r.$$

Um das Ziehen einer Kubikwurzel aus einer komplexen Zahl zu umgehen, entwickelte FRANÇOIS VIÈTE im Jahr 1591 einen alternativen Lösungsweg mithilfe von trigonometrischen Funktionen. Dabei benutzte er das Additionstheorem
$\cos(3\varphi) = 4 \cdot \cos^3(\varphi) - 3 \cdot \cos(\varphi)$, das man auch in der Form
$\cos^3(\varphi) - \frac{3}{4} \cdot \cos(\varphi) - \frac{1}{4} \cdot \cos(3\varphi) = 0$ notieren kann.
Mit $y = \cos(\varphi)$ führt dies zu der kubischen Gleichung
$$y^3 - \frac{3}{4} \cdot y - \frac{1}{4} \cdot \cos(3\varphi) = 0,$$
wobei für y nur Werte aus dem Intervall [-1 ; +1] infrage kommen. Daher muss eine geeignete Transformation vorgenommen werden, um diese Gleichung mit der Gleichung $x^3 + p \cdot x + q = 0$ in Zusammenhang zu bringen.

Für weitere Informationen zu diesem Thema sei auf CONNOR & ROBERTSON (1996), FÜHRER (1996), GERICKE (1992) und ALTEN (2003) verwiesen.

Literatur

ALTEN, H.W. et al.(2003). *4000 Jahre Algebra*, Springer, Berlin/Heidelberg.

CONNOR, J. J. & ROBERTSON, E.F. (1996): Quadratic, cubic and quartic equations, http*://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html#93* (2.1.2016).

FÜHRER, L. (1996). Kubische Gleichungen und die widerwillige Entdeckung der komplexen Zahlen *http://www.math.uni-frankfurt.de/~fuehrer/Schriften/1996_Cardano.pdf* (2.1.2016).

GERICKE, H. (1992). *Mathematik im Abendland*, Fourier, Wiesbaden.

STRICK, H. K. (2012). GIROLAMO CARDANO, *http://www.spektrum.de/alias/der-mathematische-monatskalender/girolamo-cardano-1501-1576-und-nicolo-tartaglia-1500-1557/1160795* (2.1.2016).

OStD i. R. HEINZ KLAUS STRICK, Pastor-Scheibler-Str. 10, 51381 Leverkusen, strick.lev@t-online.de.