Rot = Blau

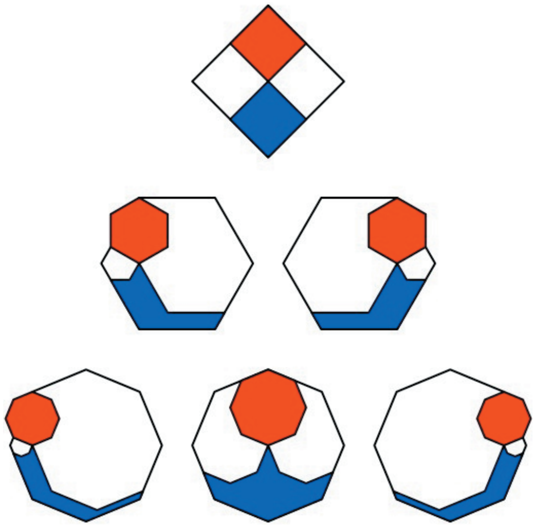
Hans Walser

Online-Ergänzung

HANS WALSER

Rot = Blau

In den einzelnen Figuren der Abbildung sind die roten und die blauen Flächenanteile jeweils gleich groß. Erläutern Sie.



HANS WALSER, hwalser@bluewin.ch

MNU 67/5 (15.7.2014), ISSN 0025-5866,

Lösung

Wir arbeiten mit regelmäßigen n-Ecken mit gerader Eckenzahl n. Die Abbildung 1zeigt die Situation für $n \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$. In den einzelnen Figuren sind die roten und die blauen Flächeninhalte jeweils gleich groß.

Abb. 1. Rot = Blau

1 Beweis

In jede Einzelfigur lässt sich ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Höhe h und Hypotenusenabschnitten p und q einspannen (Abb. 2 für $n = 10$).

Abb. 2. Beweisfigur

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen n-Ecks mit gerader Eckenzahl ist proportional zum Quadrat der längsten Diagonale d (Mittelpunkts-Diagonale, Durchmesser des Umkreises), also:

$$A = \lambda d^2 .$$

Der Proportionalitätsfaktor λ

$$\lambda = \frac{n}{8} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

ist für unsere Überlegungen uninteressant.

Für das rote n-Eck erhalten wir den Flächeninhalt:

$$A_{rot} = \lambda h^2 .$$

Die blaue Sichelfigur hat den Flächeninhalt:

$$A_{blau} = \tfrac{1}{2}\lambda \left((p = q)^2 = \tfrac{1}{2}\lambda p^2 = \tfrac{1}{2}\lambda q^2 \right) = \lambda pq .$$

Aus dem Höhensatz $h^2 = pq$ folgt die Gleichheit der Flächeninhalte.

2 Flächenverhältnisse der roten n-Ecke

Wir berechnen zeilenweise die Flächenverhältnisse der roten n-Ecke in Relation zum kleinsten roten n-Eck links in derselben Zeile der Abbildung 1 (Tab. 1).

n	Flächenverhältnisse							
4	1							
6	1	1						
8	1	2	1					
10	1	2,61803	2,62803	1				
12	1	3	4	3	1			
14	1	3,24698	5,04892	5,04892	3,24698	1		
16	1	3.41421	5,82843	6,82843	5,82843	3,41421	1	
18	1	3,53209	6,41147	8,29086	8,29086	6,41147	3,53209	1

Tab. 1. Berechnung der Flächenverhältnisse der roten n-Ecke in Relation zum kleinsten roten n-Eck in derselben Zeile

3 Grenzfall

Für $n \to \infty$ ergibt sich die Arbelos-Figur (Abb. 3). Die Flächengleichheit des roten Kreises und des blauen Arbelos (Schustermesser) kann ebenfalls mit dem Höhensatz bewiesen werden.

Abb. 3. Arbelos

Dr. HANS WALSER unterrichtet an der Uni Basel (Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, CH 4051 Basel) und an der ETH Zürich.

www.walser-h-m.ch/hans

MNU 67/5 (15.7.2014), ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

Abb. dazu

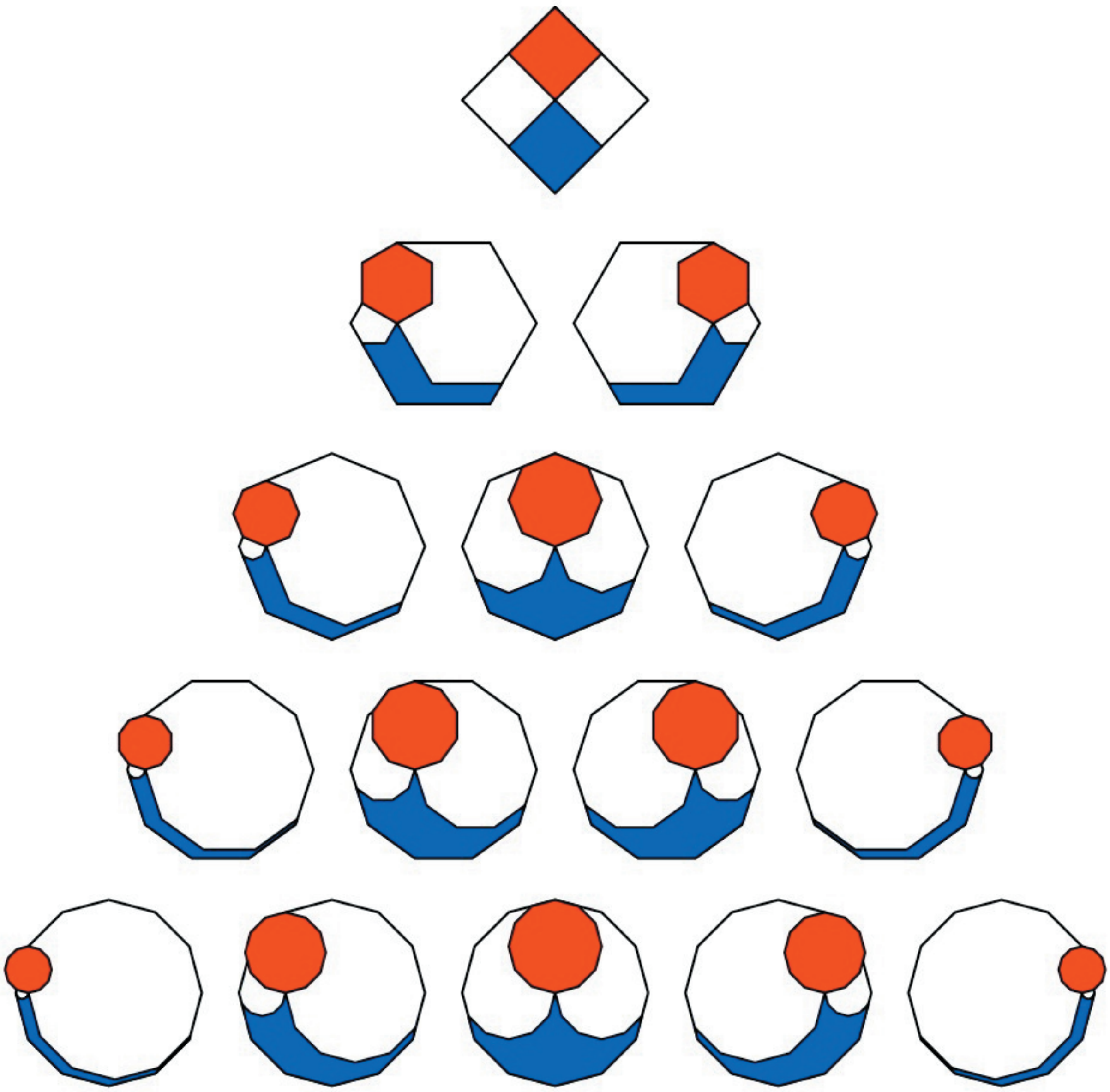


Abb. 1

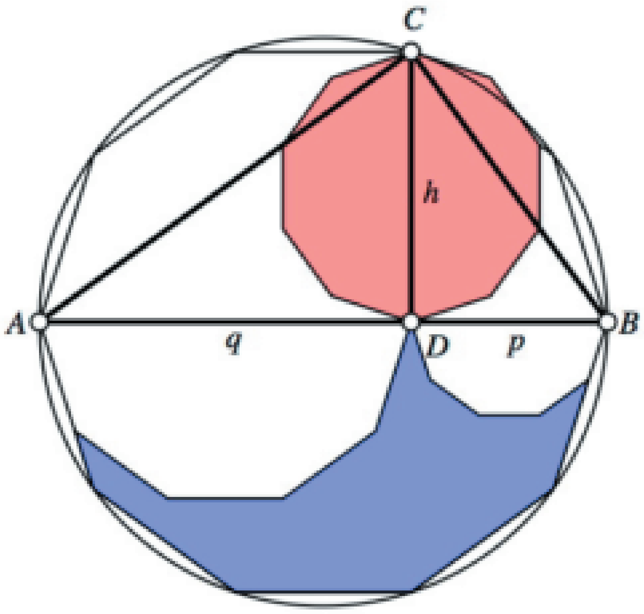


Abb. 2

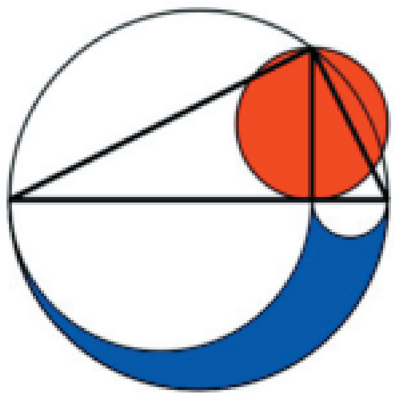


Abb. 3

 MNU 67/5 (15.7.2014), ISSN 0025-5866,