

Geniale Ideen großer Mathematiker (5)

Untersuchungen zu Augensummen



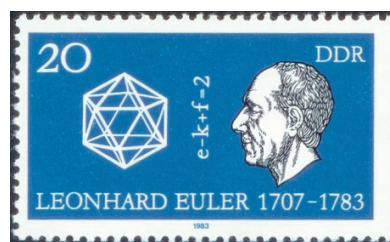
HEINZ KLAUS STRICK

Online-Ergänzung

Untersuchungen zu Augensummen

1748 erschien LEONHARD EULERS *Introductio in Analysis Infinitorum* (Einleitung in die Analysis des Unendlichen).

In Kapitel 16: *Von der Zerlegung der Zahlen in Teile* beschreibt EULER seine Entdeckung, dass sich viele kombinatorische Fragestellungen lösen lassen, wenn man sogenannte Potenzreihen verwendet, das sind unendliche Summen von Potenzen.



EULER schreibt: Führt man das unendliche Produkt

$(1+x) \cdot (1+x^2) \cdot (1+x^3) \cdot (1+x^4) \cdot (1+x^5) \cdot (1+x^6) \cdot \dots$ aus, dann erhält man die Potenzreihe

$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+\dots$; dabei geben die Koeffizienten der Potenzreihe an, „... auf wie vielerlei Arten der Exponent der betreffenden Potenz von x überhaupt aus verschiedenen Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... durch Addition entstehen kann. So lässt sich die Zahl 8 augenscheinlich auf 6 Arten durch Addition verschiedener Zahlen hervorbringen, und zwar sind diese: $8 = 8$, $8 = 7 + 1$, $8 = 6 + 2$, $8 = 5 + 3$, $8 = 5 + 2 + 1$, $8 = 4 + 3 + 1$.“

Erläutere, was EULER hiermit gemeint hat!

EULERS Entdeckung wenden wir am Beispiel des folgenden Zufallsversuchs an:

(1) Zwei reguläre Tetraeder (mit der üblichen Beschriftung) werden geworfen.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten welche Augensummen auf?

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Fülle dazu die nebenstehende Kombinationstabelle aus. Welche Wahrscheinlichkeit hat jedes der möglichen Paare?

Bestimme hiermit die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8
Wahrscheinlichkeit							

(2) Das Werfen von zwei regulären Tetraedern kann – gemäß der EULER'schen Idee – mithilfe des folgenden Produkts von zwei Polynomen (Summe von Potenzen) beschrieben werden:

$$[1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4] \cdot [1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4] = 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8.$$

Erläutere, welche Bedeutung in diesem Zusammenhang die Exponenten der Potenzen haben und welche Bedeutung die Koeffizienten der Potenzen.

	1	3	3	5
1				
2				
2				
3				

(3) Zeige: Beschriftet man die Flächen des einen Tetraeders mit den Augenzahlen 1, 2, 2, 3 und die des anderen Tetraeders mit 1, 3, 3, 5, dann ergibt sich dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8
Wahrscheinlichkeit							

(4) Welche beiden Polynome (vgl. (2)) gehören zu den zwei Tetraedern in (3)? Was ergibt sich, wenn man diese beiden Polynome miteinander multipliziert? Welche Konsequenzen ergeben sich hieraus?